Exercices

Exercice 1: On considère le mouvement d'un solide rigide en rotation soumis à une force extérieure :

$$\begin{aligned} I_1\,\dot\omega_1(t) &= (I_2 - I_3)\,\omega_2(t)\,\omega_3(t) - \omega_1(t)\\ I_2\,\dot\omega_2(t) &= (I_3 - I_1)\,\omega_3(t)\,\omega_1(t) - \omega_2(t)\\ I_3\,\dot\omega_3(t) &= (I_1 - I_2)\,\omega_1(t)\,\omega_2(t) - \omega_3(t) \end{aligned}$$

où I_1, I_2, I_3 sont les moments d'inertie du solide, i.e., des constantes strictement positives données. Construire une fonction de Lyapunov permettant de montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable.

Corrigé: $V(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^3)$.

Exercice 2: Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(0) = 0$ et $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$, et vérifiant $\int_0^{+\infty} g = +\infty$ et $\int_{-\infty}^0 |g| = +\infty$. Montrer que le point d'équilibre $x = 0, \dot x = 0$ est globalement asymptotiquement stable pour l'équation différentielle $\ddot x(t) + \dot x(t) + g(x(t)) = 0$.

Corrigé: $V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)\,ds$.

Exercice 3: Lemme de Lyapunov et applications

1. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $A^\top P + PA = -I_n$.
   (*Indication :* poser $P = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{tA^\top} e^{tA}\,dt$)
   (b) En déduire que $V(x) = \langle x, Px\rangle$ est une fonction de Lyapunov pour le système $\dot x(t) = Ax(t)$ et que l'origine est globalement asymptotiquement stable.
2. (a) Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 telle que $q(x) = \mathrm{o}(\|x\|)$ lorsque $x \to 0$. Montrer que la fonction V précédente est encore une fonction de Lyapunov pour le système $\dot x(t) = Ax(t) + q(x(t))$ et que l'équilibre 0 est localement asymptotiquement stable.
   (b) Quel résultat peut-on en déduire sur la stabilité des points d'équilibre d'un système autonome $\dot x(t) = F(x(t))$ où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 ?

Exercice 4:

1. On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \quad x_2(t) + b_1 u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + b_2 u(t),\end{aligned}$$
où $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le contrôle est $u(t) \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que le système est contrôlable, depuis un point quelconque et en temps quelconque.
   (b) En déduire que le système est globalement stabilisable vers $(0,0)$, par feedback linéaire $u = Kx$ et déterminer toutes les matrices $K = (k_1, k_2)$ qui le font.
   (c) On veut maintenant stabiliser asymptotiquement le système vers l'origine par les techniques de Lyapunov-LaSalle (Jurdjevic-Quinn), et on veut déterminer un contrôle feedback qui vérifie la contrainte $|u| \leqslant 1$. On pose $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.
      i. Calculer $\frac{d}{dt}V(x(t))$.
      ii. En déduire un contrôle qui répond à la question (et démontrer la propriété de stabilisation).

2. On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$
où A est une matrice carrée antisymétrique de taille n, et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que le couple (A, b) vérifie la condition de Kalman.

   En posant $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, déterminer un contrôle feedback vérifiant la contrainte $|u| \leqslant 1$, et rendant le système globalement asymptotiquement stable vers l'origine.

Corrigé:

1. (a) On vérifie la condition de Kalman.
   (b) Contrôlable implique stabilisable. Le polynôme caractéristique de $A + BK$ est $P(z) = z^2 + (-b_2k_2 - b_1k_1)z + 1 + b_1k_2 - b_2k_1$, et d'après le critère de Routh il est Hurwitz si et seulement si $-b_2k_2 - b_1k_1 > 0$ et $b_1k_2 - b_2k_1 > 0$.
   (c) i. $\frac{d}{dt}V(x(t)) = u(t)(b_1x_1(t) + b_2x_2(t))$.
      ii. On choisit
$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathrm{sat}(-1, b_1x_1(t) + b_2x_2(t), 1)\\ &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad b_1x_1(t) + b_2x_2(t) \leqslant -1\\ -(b_1x_1(t) + b_2x_2(t)) & \text{si} \quad -1 \leqslant b_1x_1(t) + b_2x_2(t) \leqslant 1\\ 1 & \text{si} \quad b_1x_1(t) + b_2x_2(t) \geqslant 1 \end{cases}\end{aligned}$$
      La fonction V est C^1, positive, ne s'annule qu'en 0, et est coercive et propre. De plus si $\frac{d}{dt}V(x(t)) \equiv 0$ alors $b_1x_1(t) + b_2x_2(t) \equiv 0$ et par dérivation on obtient aussi $b_1x_2(t) - b_2x_1(t) \equiv 0$, d'où $x_1(t) = x_2(t) = 0$. On conclut par le principe de LaSalle (en fait il vaudrait mieux définir u de manière lisse ci-dessus pour éviter des ennuis techniques).

2. Comme $A^\top = -A$, on a $\frac{d}{dt}V(x(t)) = u(t)\langle b, x(t)\rangle$. On choisit
$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathrm{sat}(-1, \langle b, x(t)\rangle, 1)\\ &= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \langle b, x(t)\rangle \leqslant -1\\ -\langle b, x(t)\rangle & \text{si} \quad -1 \leqslant \langle b, x(t)\rangle \leqslant 1\\ 1 & \text{si} \quad \langle b, x(t)\rangle \geqslant 1 \end{cases}\end{aligned}$$
   Si $\frac{d}{dt}V(x(t)) \equiv 0$ alors $\langle b, x(t)\rangle \equiv 0$, et par dérivation, $\langle b, Ax(t)\rangle = 0$, puis par dérivations successives, $\langle b, A^k x(t)\rangle = 0$. Comme $A^\top = -A$, on en déduit que $\langle x(t), A^k b\rangle = 0$ pour tout entier k. La condition de Kalman implique alors que $x(t) = 0$. On conclut par LaSalle.

Exercice 5: *Problème de Zermelo*

Le mouvement d'une barque se déplaçant à vitesse constante sur une rivière où il y a un courant $c(y)$ est modélisé par

$$\dot{x}(t) = v\cos u(t) + c(y(t)),\ x(0) = 0,$$
$$\dot{y}(t) = v\sin u(t),\ y(0) = 0,$$

où v est la vitesse et $u(t)$, l'angle de la barque par rapport à l'axe $(0x)$, est le contrôle.

1. Supposons que pour tout y on ait $c(y) > v$. Quelle est la loi optimale permettant de minimiser le déport $x(t_f)$ pour atteindre la berge opposée ?
2. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre la berge opposée.
3. Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre un point M de la berge opposée.

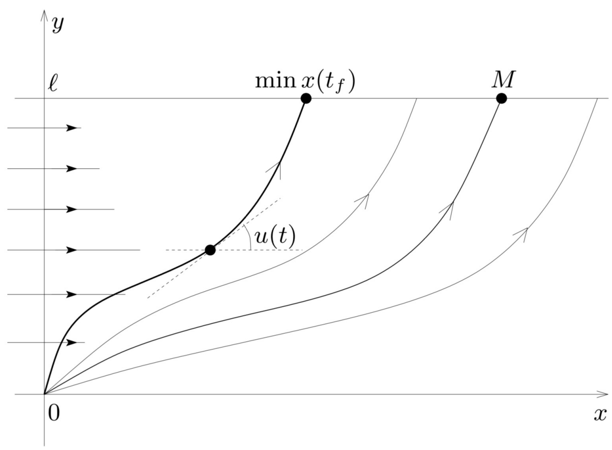


Figure 1: Problème de Zermelo

Corrigé:

1. On a $H = p_x(v\cos u + c(y)) + p_y v \sin u$, et $p_x = -1$, $H(t_f) = 0$. On trouve
$$u = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{v}{c(y)}\right).$$
2. On a $H = p_x(v\cos u + c(y)) + p_y v\sin u + p^0$, et $p_x = 0$, $H(t_f) = 0$, puis $u = \frac{\pi}{2}$.
3. On a $H = p_x(v\cos u + c(y)) + p_y v\sin u + p^0$, et $p_x = \mathrm{Cste}$, $H(t_f) = 0$, puis
$$\cos u = \frac{p_x v}{1 - p_x c(y)},$$
où p_x doit être choisi de manière à atteindre M (cf méthode de tir), ou bien la solution avec $p^0 = 0$ (anormale) qui est la solution de 1.

<u>Exercice 6:</u> *Contrôle des équations de Maxwell-Bloch*

Les équations de Maxwell-Bloch à valeurs réelles modélisent l'interaction entre la lumière et la matière et décrivent la dynamique d'un système quantique à deux états à valeurs réelles interagissant avec le champ électromagnétique dans une cavité optique. Il s'agit du système de contrôle dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_3(t) + u_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

où l'état est $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^\top \in \mathbb{R}^3$ et le contrôle est $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. **Remarques générales sur le système.** On pose

$$I_1(x) = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2), \qquad I_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_3.$$

   (a) Calculer $\frac{d}{dt}I_1(x(t))$ et $\frac{d}{dt}I_2(x(t))$ le long d'une trajectoire quelconque.

   (b) Montrer que si $u = 0$ (système sans contrôle) alors I_1 et I_2 sont constantes le long de toute trajectoire et montrer que le système s'écrit alors

$$\dot{x}(t) = \nabla I_1(x(t)) \wedge \nabla I_2(x(t)).$$

2. **Etude des points d'équilibre.**

   (a) Montrer que tous les points d'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$ du système sont donnés par les familles paramétrées

$$\mathcal{F}_1 = \{\bar{x} = (0, b, c),\ \bar{u} = (-b, 0)\ \mid\ b, c \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{F}_2 = \{\bar{x} = (a, 0, c),\ \bar{u} = (0, -ac)\ \mid\ a, c \in \mathbb{R}\}$$

   (b) Linéariser le système en un point de $\mathcal{F}_1$ et donner une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité de ce système linéarisé.

   (c) Linéariser le système en un point de $\mathcal{F}_2$ et donner une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité de ce système linéarisé.

   (d) En déduire que le système est localement contrôlable autour de tout point d'équilibre qui n'est pas de la forme $\bar{x} = (0, 0, c)$, $\bar{u} = (0, 0)$.

3. **Stabilisation en $\bar{x} = (a, 0, 0)$ avec $a \neq 0$.**

   Dans cette question, l'objectif est de stabiliser localement le système en le point d'équilibre $\bar{x} = (a, 0, 0)$, $\bar{u} = (0, 0)$, où $a \neq 0$ est fixé.

   (a) Montrer que le système linéarisé en ce point, $\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$, est stabilisable par feedback linéaire $\delta u = K\delta x$.

   (b) On cherche une matrice K particulière permettant de stabiliser le système, de la forme $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A + BK$ est Hurwitz si et seulement si $k_1 < 0$ et $k_2 < -k_1$ et $k_2 \neq 0$.

   (c) En déduire que le système non linéaire est localement stabilisable en $\bar{x}$, et donner la forme des feedbacks.

4. **Contrôlabilité globale vers l'origine.**

   On suppose que $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, $x_3(0) = x_3^0$ et on veut trouver une stratégie de contrôle permettant d'atteindre l'origine $(0, 0, 0)$. On suppose d'abord que $x_1^0 \neq 0$.

   (a) On pose $u_1 = -x_2$. Montrer que, pour tout $T > 0$, il existe un contrôle u_2 permettant d'amener le système à $x_1(T) = x_1^0$, $x_2(T) = 0$, $x_3(T) = 0$.

   (b) En déduire une stratégie de contrôle permettant d'atteindre l'origine en temps quelconque (on pourra utiliser le résultat de la question 1(a)).

   (c) Comment faire lorsque $x_1^0 = 0$?

5. **Contrôle optimal vers l'origine.**

   On suppose que $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, $x_3(0) = x_3^0$. L'objectif de cette question est d'amener le système à l'origine, $x(t_f) = 0$, en temps minimal, sous la contrainte $u_1(t)^2 + u_2(t)^2 \leqslant 1$.

   (a) Ecrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal. On note l'adjoint (p, p^0) avec $p = (p_1, p_2, p_3)$.

   (b) Ecrire les équations extrémales adjointes.

   (c) Montrer que le Hamiltonien maximisé est nul le long de toute extrémale.

   (d) Montrer par l'absurde que la fonction $t \mapsto p_1(t)^2 + p_2(t)^2$ ne s'annule identiquement sur aucun sous-intervalle.

   (e) Résoudre la condition de maximisation du Hamiltonien et donner les contrôles optimaux.

6. **Oscillateur auto-entretenu de Van der Pol dans le système de Maxwell-Bloch.**

   Dans cette question on suppose que $u_1 = 0$ et on contrôle le système uniquement à l'aide de u_2.

   (a) A l'aide de 1(a), montrer que le système se réduit à

   $$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= I_2 x_1(t) - \frac{1}{2} x_1(t)^3 + u_2(t) \end{aligned}$$

   avec $I_2 = \frac{1}{2} x_1(0)^2 + x_3(0)$, i.e., à l'équation de Van der Pol avec contrôle $\ddot{x}_1 - I_2 x_1 + \frac{1}{2} x_1^3 = u_2$ (et noter que $x_3(t) = I_2 - \frac{1}{2} x_1(t)^2$).

   (b) On pose $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{I_2}{2} x_1^2 + \frac{1}{8} x_1^4$. Calculer $\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t))$ et remarquer que si $u_2 = 0$ alors V est constante le long des trajectoires.

   (c) Soit $C > 0$. On pose $u_2 = -x_2(V(x_1, x_2) - C)$. Montrer que toute trajectoire telle que $(x_1(0), x_2(0))$ n'est pas égal à $(0, 0)$ ni à $(\pm\sqrt{2I_2}, 0)$ lorsque $I_2 > 0$, converge vers la courbe définie par $V(x_1, x_2) = C$.

Corrigé:

1. (a) $\dot{I}_1 = x_2 u_2$ et $\dot{I}_2 = x_1 u_1$.
   (b) Trivial.
2. (a) D'après la troisième équation, on a soit $x_1 = 0$, ce qui conduit à la famille $\mathcal{F}_1$, soit $x_2 = 0$, ce qui conduit à la famille $\mathcal{F}_2$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et par Kalman la CNS de contrôlabilité est $b \neq 0$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et par Kalman la CNS de contrôlabilité est $a \neq 0$.
   (d) Contrôlabilité du linéarisé implique contrôlabilité locale.
3. (a) D'après 2(c), le système linéaire (avec $c = 0$ et $a \neq 0$) est contrôlable donc stabilisable par feedback linéaire.
   (b) On calcule $\chi_{A+BK}(\lambda) = \lambda^3 - (k_1 + k_2)\lambda^2 + (a^2 + k_1 k_2)\lambda - a^2 k_1$ et on obtient par la table de Routh que $A + BK$ est Hurwitz si et seulement si

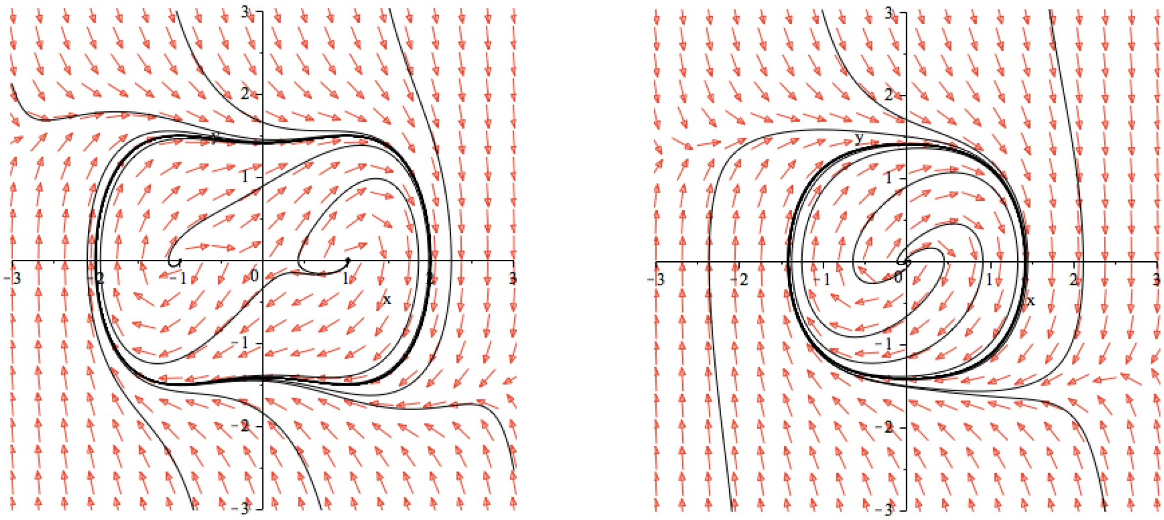
   $$k_1 < 0, \qquad k_1 + k_2 < 0, \qquad (k_1 + k_2)(a^2 + k_1 k_2) < a^2 k_1.$$

   La troisième condition s'écrit $k_2(k_1^2 + a^2 + k_1 k_2) < 0$. Si $k_2 < 0$ alors $k_1^2 + a^2 + k_1 k_2 > 0$ et il n'y a pas d'autre condition. Si $k_2 > 0$ (notons qu'on ne peut pas avoir $k_2 = 0$) alors on doit avoir $k_2 < -k_1$ et $k_2 < \frac{k_1^2 + a^2}{-k_1}$ (avec $-k_1 > 0$), mais on a $-k_1 < \frac{k_1^2 + a^2}{-k_1}$ (car $k_1^2 < k_1^2 + a^2$). D'où la CNS demandée.
   (c) Le feedback $u_1 = k_1(x_1 - a)$, $u_2 = k_2 x_2$ avec k_1, k_2 vérifiant la CNS, rend le système LAS en $\bar{x}$.
4. (a) Avec $u_1 = -x_2$ on a $x_1(t) = \text{Cste} = x_1^0$ et le système se réduit au système linéaire autonome $\dot{x}_2(t) = x_1^0 x_3(t) + u_2(t)$, $\dot{x}_3(t) = -x_1^0 x_2(t)$ dont les matrices sont $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1^0 \\ -x_1^0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qui est donc contrôlable en temps quelconque par Kalman.
   (b) D'après 4(a), on amène d'abord le système au point $(x_1^0, 0, 0)$. Ensuite, on pose $u_2 = 0$ et alors, par 1(a), I_1 reste constante donc $x_2(t) = x_3(t)$ restent égaux à 0 et le système se réduit à $\dot{x}_1 = u_1$ et alors on peut trivialement amener x_1 à 0 en temps quelconque.
   (c) Si $x_1^0 = 0$, on pose $u_1 = -x_2 + 1$ pendant un temps quelconque, ce qui amène le système à un point en lequel $x_1 \neq 0$. Puis on applique la stratégie précédente.
5. (a) $H = p_1 x_2 + p_2 x_1 x_3 - p_3 x_1 x_2 + p_1 u_1 + p_2 u_2 + p^0$.
   (b) $\dot{p}_1 = -p_2 x_3 + p_3 x_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1 + p_3 x_1, \quad \dot{p}_3 = -p_2 x_1$.
   (c) Le temps final libre et le problème est autonome, donc le Hamiltonien maximisé est nul le long de toute extrémale.
   (d) Par l'absurde, si $p_1 \equiv 0$ et $p_2 \equiv 0$ sur un intervalle I alors, d'après 5(b), on a aussi $p_3 x_1 \equiv 0$ et $p_3 x_2 \equiv 0$ sur I, p_3 constante sur I, et d'après 5(c) on a aussi $-p_3 x_1 x_2 + p^0 \equiv 0$ sur I. On a forcément $p_3 \neq 0$ (sinon on aurait aussi $p^0 = 0$ et donc $(p, p^0) = (0, 0)$: absurde), donc $x_1 \equiv 0$ et $x_2 \equiv 0$ sur I, et $p^0 = 0$. Ainsi, sur l'intervalle I, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont identiquement nuls, $x_3(t)$ est donc constante (et on doit avoir $u_1 = -x_2$ et $u_2 = -x_1 x_3$ sur I): l'état complet est donc constant sur I. Une telle stratégie ne peut pas être temps-minimale. On a donc obtenu une contradiction.
   (e) $u_1(t) = \frac{p_1(t)}{\sqrt{p_1(t)^2 + p_2(t)^2}}$ et $u_2(t) = \frac{p_2(t)}{\sqrt{p_1(t)^2 + p_2(t)^2}}$.
6. (a) Trivial.
   (b) $\dot{V} = x_2 u_2$.

(c) Avec $u_2 = -x_2(V - C)$ le système dynamique devient

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= I_2 x_1 - \frac{1}{2}x_1^3 - x_2\left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{I_2}{2}x_1^2 + \frac{1}{8}x_1^4 - C\right)\end{aligned}$$

Ses points d'équilibre sont $(0, 0)$ et aussi $(\pm\sqrt{2I_2}, 0)$ lorsque de plus $I_2 > 0$. On a $\dot{V} = -x_2^2(V - C)$. La courbe $V = C$ est difféomorphe à un cercle unité (voir figure 2) et l'ensemble $\{V \leqslant C\}$ est l'intérieur de ce disque déformé (contenant le ou les points d'équilibre). Prenons un point initial distinct des points d'équilibre. Si $V < C$ (resp., $V > C$) en ce point alors V a tendance à croître (resp., décroître). On déduit du principe de LaSalle que toute trajectoire ne partant pas d'un point d'équilibre converge vers la courbe $V = C$.



(a) $I_2 = \frac{1}{2}$, $C = 1$

(b) $I_2 = -\frac{1}{2}$, $C = 1$

Figure 2: Convergence vers la courbe d'équation $V = C$

Exercice 7: *Commande optimale d'un réacteur chimique*

Un réacteur chimique industriel permet de fabriquer un produit à partir d'un réactif par une réaction irréversible du premier ordre avec dégagement de chaleur. Pour refroidir le réacteur, on fait circuler le contenu à travers un échangeur thermique; la chaleur passe ainsi dans le liquide de refroidissement qui circule dans le circuit secondaire de l'échangeur avec un débit $u(t)$. Après diverses réductions de modèle, le système s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) - k x_1(t) e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + r_1 \\ \dot{x}_2(t) &= a_3(a_4 - x_2(t)) + a_5 k x_1(t) e^{-\frac{a_2}{x_2(t)}} + a_6(u(t) - x_2(t)) - r_2\end{aligned}$$

où $x_1(t)$ est la concentration du réactif au temps t, $x_2(t)$ est la température du réacteur au temps t, et r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs. Par ailleurs, les coefficients k et a_i, $i = 1 \dots 6$, sont des réels positifs. On suppose que le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte

$$|u(t)| \leqslant M$$

où M est un réel positif. Soit $T > 0$ un temps final **fixé**. Dans ce qui suit, l'état initial est fixé :

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

et l'état final $(x_1(T), x_2(T))$ est libre.

1. Dans cette première question, on cherche à minimiser la quantité de réactif $x_1(T)$.
   On note les variables adjointes p et p^0.

   (a) Ecrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations des extrémales.

   (b) Ecrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

   (c) Montrer que $p^0 \neq 0$. Que posez-vous pour la suite ?

   (d) Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang, et préciser leur expression.
   (*indication :* démontrer, par l'absurde, que $p_2(t)$ ne peut s'annuler identiquement sur un sous-intervalle)

   (e) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = M$, pour presque tout $t \in [T - \varepsilon, T]$ (autrement dit, le contrôle u vaut M à la fin).

   (f) On suppose que $a_5 = 0$. Démontrer que le contrôle optimal est constant sur $[0, T]$, égal à M.

2. Dans cette deuxième question, on cherche toujours à minimiser la quantité de réactif $x_1(T)$, mais en minimisant aussi la température $x_2(t)$ au cours de la réaction, et l'énergie fournie. Le compromis choisi et de chercher à minimiser le coût

   $$C_T(u) = \int_0^T (u(t)^2 + \beta x_2(t)^2) dt + x_1(T),$$

   où $\beta \geqslant 0$ est fixé.

   (a) Ecrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal et les équations des extrémales.

   (b) Ecrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

   (c) Montrer que $p^0 \neq 0$. Que posez-vous pour la suite ?

   (d) Détailler la condition de maximisation du principe du maximum de Pontryagin, et donner l'expression des contrôles optimaux.

   (e) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = \frac{1}{2} a_6 p_2(t)$, pour presque tout $t \in [T - \varepsilon, T]$.

   (f) On suppose que $a_5 = \beta = 0$. Démontrer que le contrôle optimal est strictement positif sur $[0, T]$, et préciser son expression.

Corrigé :

1. (a) Le Hamiltonien est

$$H = p_1(-a_1x_1 - kx_1e^{-\frac{a_2}{x_2}} + r_1) + p_2(a_3(a_4 - x_2) + a_5kx_1e^{-\frac{a_2}{x_2}} + a_6(u - x_2) - r_2).$$

Les équations des extrémales sont

$$\dot{p}_1 = p_1(a_1 + ke^{-\frac{a_2}{x_2}}) - p_2a_5ke^{-\frac{a_2}{x_2}}$$
$$\dot{p}_2 = p_1kx_1\frac{a_2}{x_2^2}e^{-\frac{a_2}{x_2}} + p_2(a_3 + a_6 - a_5kx_1\frac{a_2}{x_2^2}e^{-\frac{a_2}{x_2}})$$

(b) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint sont alors $p_1(T) = p^0$ et $p_2(T) = 0$, avec $p^0 \leqslant 0$.

(c) D'où il découle forcément que $p^0 \neq 0$. On pose alors $p^0 = -1$.

(d) Il résulte de la condition de maximisation que $u(t) = M * signe(p_2(t))$ (bang-bang), pourvu que p_2 ne s'annule pas identiquement sur un sous-intervalle.
Par l'absurde, si p_2 s'annule identiquement sur un sous-intervalle, alors, d'après l'équation de p_2, on obtient aussi $p_1 = 0$. Par unicité de Cauchy, on obtient alors $p_1 = p_2 = 0$ sur tout l'intervalle $[0, T]$, ce qui contredit $p_1(T) = -1$.

(e) A la fin $p_2(T) = 0$ et $p_1(T) = -1$, d'où, par l'équation de p_2, $\dot{p}_2(T) < 0$. Donc, à la fin p_2 est strictement décroissante, et comme $p_2(T) = 0$, on obtient $p_2(t) > 0$ sur un sous-intervalle, et donc, $u(t) = M$ à la fin.

(f) Si de plus $a_5 = 0$, alors, d'après l'équation de p_1, $p_1(t)$ ne peut s'annuler (par unicité de Cauchy), donc $p_1(t) < 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc $\dot{p}_2 < (a_3 + a_6)p_2$. Par conséquent, $\frac{d}{dt}e^{-(a_3+a_6)t}p_2(t) < 0$, d'où il résulte que $e^{-(a_3+a_6)t}p_2(t) > e^{-(a_3+a_6)T}p_2(T) = 0$, et donc, $p_2(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$. Donc $u = M$ sur tout l'intervalle.

2. (a) Le Hamiltonien est

$$H = p_1(-a_1x_1 - kx_1e^{-\frac{a_2}{x_2}} + r_1) + p_2(a_3(a_4 - x_2) + a_5kx_1e^{-\frac{a_2}{x_2}} + a_6(u - x_2) - r_2) + p^0(u^2 + \beta x_2^2).$$

Les équations des extrémales sont

$$\dot{p}_1 = p_1(a_1 + ke^{-\frac{a_2}{x_2}}) - p_2a_5ke^{-\frac{a_2}{x_2}}$$
$$\dot{p}_2 = p_1kx_1\frac{a_2}{x_2^2}e^{-\frac{a_2}{x_2}} + p_2(a_3 + a_6 - a_5kx_1\frac{a_2}{x_2^2}e^{-\frac{a_2}{x_2}}) - 2p^0\beta x_2$$

(b) Les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint sont $p_1(T) = p^0$ et $p_2(T) = 0$, avec $p^0 \leqslant 0$.

(c) D'où il découle forcément que $p^0 \neq 0$. On pose alors $p^0 = -1$.

(d) La condition de maximisation est

$$\max_{-M \leqslant u \leqslant M}(a_6p_2(t)u - u^2).$$

La fonction à maximiser est quadratique, son maximum absolu (sans tenir compte des contraintes) et atteint pour $u = \frac{1}{2}a_6p_2(t)$, d'où il résulte que

$$u(t) = \begin{cases} -M & \text{si} \quad \frac{1}{2}a_6p_2(t) < -M, \\ \frac{1}{2}a_6p_2(t) & \text{si} \quad |\frac{1}{2}a_6p_2(t)| < M, \\ M & \text{si} \quad \frac{1}{2}a_6p_2(t) > M. \end{cases}$$

(e) A la fin, $p_2(T) = 0$, donc par continuité, $p_2(t)$ reste petit sur un intervalle du type $[T - \varepsilon, T]$, et donc $|\frac{1}{2}a_6p_2(t)| < M$ sur cet intervalle, et donc, $u(t) = \frac{1}{2}a_6p_2(t)$ à la fin.

(f) Si de plus $a_5 = \beta = 0$, alors, comme en 1.f, on montre que $p_2(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$. Donc $u > 0$ sur tout l'intervalle, et vaut soit M soit $\frac{1}{2}a_6p_2(t)$ comme ci-dessus.

Exercice 8: *Contrôle de dynamiques collectives*

Question préliminaire:
Soient N et m des entiers naturels non nuls. Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ une matrice carrée réelle de taille N, et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant j\leqslant m}$ une matrice réelle de taille $N \times m$, telles que le couple (A, B) vérifie la condition de Kalman. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le système de contrôle dans $(\mathbb{R}^d)^N$

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j(t), \qquad i = 1 \dots N,$$

où $v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ et $u_j(t) \in \mathbb{R}^d$, est contrôlable en temps quelconque, depuis un point initial quelconque.

> *Corrigé:* On utilise la notation du produit de Kronecker de matrices: le système s'écrit sous la forme $\dot{v}(t) = (A \otimes I_d)v(t) + (B \otimes I_d)u(t)$, où par définition les matrices $A \otimes I_d$ et $B \otimes I_d$ sont constituées des blocs $d \times d$ respectifs $a_{ij} I_d$ et $b_{ij} I_d$. On voit facilement que, pour le produit habituel de matrices: $(A \otimes I_d)^k (B \otimes I_d) = A^k B \otimes I_d$, et la condition de Kalman s'ensuit pour le système en dimension dN.

Contrôle de dynamiques collectives.
Soient d et N des entiers naturels non nuls. On note $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^d$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. Soit $M > 0$ fixé. On considère le système (dit de Krause) de contrôle

$$\dot{v}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} (v_j(t) - v_i(t)) + u_i(t), \qquad i = 1 \dots N, \tag{1}$$

avec $v_i(t) \in \mathbb{R}^d$, les contrôles sont $u_i(t) \in \mathbb{R}^d$. On suppose que les coefficients σ_{ij} sont symétriques et positifs: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \geqslant 0$, pour $i, j = 1, \dots, N$. Ce système modélise un réseau de N agents en interaction, et σ_{ij} est le coefficient d'interaction entre les agents i et j.

On appelle *consensus* un point d'équilibre du système (1) pour lequel $u_i = 0$ et $v_i = v_j$ pour tous les indices i, j.

1. **Stabilisation.**
   (a) On pose $\bar{v}(t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} v_i(t)$ et $\bar{u}(t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i(t)$. Montrer que $\dot{\bar{v}}(t) = \bar{u}(t)$.

   (b) On définit la variance du groupe $V(t) = \dfrac{1}{2N^2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \|v_i(t) - v_j(t)\|^2$.

   Montrer que $V(t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \|v_i(t) - \bar{v}\|^2$, puis que

   $$\dot{V}(t) = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{ij} \|v_i(t) - v_j(t)\|^2 + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \langle v_i(t) - \bar{v}(t), u_i(t) \rangle.$$

   (c) Dans cette question, on suppose qu'il n'y a pas de contrôle: $u_i = 0$ pour tout i. Démontrer que, si $\sigma_{ij} > 0$ pour tous les indices $i, j = 1, \dots, N$, alors le système est globalement asymptotiquement stable vers un consensus. Déterminer quel est ce consensus en fonction des données initiales (on remarquera que, en l'absence de contrôle, on a $\bar{v}(t) = \text{Cst}$).

   (d) Dans le cas général où $\sigma_{ij} \geqslant 0$, le système ne converge pas forcément naturellement vers un consensus (en donner un exemple simple). Déterminer des contrôles feedbacks très simples qui stabilisent asymptotiquement le système vers un consensus. Quel est ce consensus ?

(e) On veut maintenant déterminer une stratégie de contrôle feedback au consensus, qui soit à la fois "parcimonieuse" (i.e., à tout instant au plus un contrôle u_i est non nul), et mène le système au consensus en temps fini. On impose de plus les contraintes $\|u_i(t)\| \leqslant M$ pour tout i.

On définit un tel contrôle feedback de la manière suivante: tant qu'on n'est pas arrivé au consensus, on considère le plus petit indice j tel que $\|v_j - \bar{v}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \|v_i - \bar{v}\|$, et on pose

$$u_j = -M \frac{v_j - \bar{v}}{\|v_j - \bar{v}\|} \qquad \text{et} \qquad u_i = 0 \ \text{ si } \ i \neq j.$$

Démontrer que ce feedback répond à la question.

2. **Contrôlabilité.** On suppose que seul le premier agent est contrôlé, i.e., $u_i = 0$ pour $i = 2, \dots, N$. On ne met pas de contrainte sur le contrôle pour l'instant. On pose $a_{ij} = \sigma_{ij}$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \sigma_{ik}$, et on définit la matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ de taille N, et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^N$.

(a) A l'aide de l'exercice 1, montrer que le système (1) est contrôlable (en temps quelconque, depuis un point quelconque) si et seulement si le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ l'est.

(b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ (on remarquera que $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top \in \ker A$).

(c) Après avoir justifié qu'on peut écrire $P^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \end{pmatrix}^\top$, démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité est : $0, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ distinctes deux à deux, et $\alpha_2 \cdots \alpha_N \neq 0$.

(d) En imposant les contraintes $\|u_i(t)\| \leqslant M$ pour tout i, en déduire que, sous cette condition, le système (1) est localement contrôlable au voisinage de tout consensus.

(e) Démontrer que, partant d'une condition initiale quelconque, on peut mener le système (1) à n'importe quel consensus, avec un contrôle parcimonieux, en temps suffisamment grand, et sous les contraintes $\|u_i(t)\| \leqslant M$ pour tout i.

3. **Contrôle optimal.** Soient $v^* \in \mathbb{R}^d$. On considère le problème de contrôle optimal de mener le système (1) en temps minimal t_f d'un point initial fixé vers un point de consensus quelconque (i.e., tel que tous les $v_i(t_f)$ soient égaux), sous les contraintes $\|u_i(t)\| \leqslant M$ pour tout i.

(a) Appliquer le principe du maximum de Pontryagin à ce problème de contrôle optimal:

i. Ecrire le Hamiltonien du problème (on note $p_i \in \mathbb{R}^d$ le vecteur adjoint associé à $v_i \in \mathbb{R}^d$).

ii. Ecrire les équations extrémales.

iii. Ecrire les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint au temps final.

iv. Ecrire la condition de maximisation.

v. Montrer que le Hamiltonien maximisé est nul le long de toute extrémale.

vi. Démontrer que $p^0 \neq 0$.

(b) Démontrer que $\sum_{i=1}^{N} p_i(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

(c) En lien avec la question 2. (notamment 2.(c)), et en utilisant la matrice A définie dans cette question, on suppose que chaque couple (A, B_i) vérifie la condition de Kalman, pour tout i, où $B_i \in \mathbb{R}^d$ est la colonne dont tous les éléments sont nuls sauf le i-ème qui est égal à 1.

Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang (i.e., saturent la contrainte).

Indication: on montrera que $t \mapsto p_i(t)$ est analytique, et on raisonnera par l'absurde.

Corrigé:

1. (a) Calcul.
   (b) Calcul.
   (c) On a $\dot{V} \leqslant -\varepsilon V$ pour un $\varepsilon > 0$, donc $v_j(t) \to \bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(0)$.
   (d) Prendre $u_j = -(v_j - \bar{v})$ (éventuellement, saturé). On note que $\bar{v}$ reste constante, donc on converge vers le même consensus qu'à la question précédente.
   (e) Par définition, on obtient $\dot{V} \leqslant -2\frac{M}{N}\sqrt{V}$, d'où $\sqrt{V(t)} \leqslant \sqrt{V(0)} - \frac{M}{N}t$ tant qu'on n'est pas au consensus. On atteint donc le consensus en temps fini $t_f \leqslant \frac{M}{N}\sqrt{V(0)}$, avec un contrôle parcimonieux.
2. (a) Application directe de l'exercice 1.
   (b) $\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^\top \in \ker A$ car la somme des colonnes est nulle, et A est symétrique donc diagonalisable par matrice orthogonale.
   (c) La première colonne de P est $\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^\top$, donc la première ligne de $P^{-1} = P^\top$ est $\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$. Comme $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^\top$, la première colonne de P^{-1} s'écrit $\begin{pmatrix}1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N\end{pmatrix}^\top$. Concernant les matrices de Kalman, on a

$$P^{-1}K(A,B) = K(P^{-1}AP, P^{-1}B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \lambda_2\alpha_2 & & \lambda_2^{N-1}\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_N & \lambda_N\alpha_N & \cdots & \lambda_N^{N-1}\alpha_N \end{pmatrix}$$

   et en reconnaissant un déterminant de Van Der Monde, on obtient la CNS de contrôlabilité.
   (d) Trivial.
   (e) On applique 1.(a)v. pour s'approcher (en temps grand) d'un consensus, puis on applique itérativement le résultat de contrôlabilité locale en un consensus, le long d'un chemin de points de consensus (possible car l'ensemble des consensus est connexe par arcs).
3. (a) i. $H = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_{ij}\langle p_i, v_j - v_i\rangle + \sum_{i=1}^{N}\langle p_i, u_i\rangle + p^0$
   ii. $\dot{p}_i = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}(p_j - p_i)$
   iii. L'ensemble cible étant la diagonale, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i(T) = 0$.
   iv. $u_i(t) = M\frac{p_i(t)}{\|p_i(t)\|}$ pourvu que $p_i(t) \neq 0$.
   v. Système autonome, et temps final libre.
   vi. Au temps final, $H(t_f) = 0$, et comme on a consensus, on obtient $\sum_i \|p_i(t_f)\| + p^0 = 0$ (le Hamiltonien maximisé vaut toujours cela, même si $p_i(t_f) = 0$). Par l'absurde, si $p^0 = 0$ alors on obtient $p_i(t_f) = 0$ pour tout i: absurde.
   (b) On a $\sum_i \dot{p}_i = 0$ donc $\sum_i p_i(t) = \text{Cste}$, et cette constante est nulle en prenant $t = T$.
   (c) Il faut montrer que, pour tout i $p_i(t)$ ne s'annule identiquement sur aucun sous-intervalle. On raisonne par l'absurde. S'il existe un indice i tel que $p_i(t)$ s'annule identiquement sur un sous-intervalle: comme $p(t)$ est solution d'un système linéaire, il est combinaison linéaire d'exponentielles, donc est analytique. Donc $p_i(t)$ s'annule partout sur $[0, t_f]$. Par hypothèse, (A, B_i) vérifie Kalman donc on a l'inégalité d'observabilité $\int_0^{t_f} \|B_i^\top p_i(t)\|^2\, dt \geqslant c\|p(0)\|^2$, dont on déduit que $p \equiv 0$. Mais alors, en reprenant le raisonnement de la question 3.(a)vi., on obtient aussi $p^0 = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 9: *Phénomène de turnpike*

Synopsis: On considère un problème de contrôle optimal, en temps final fixé $T > 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ &x(0) \in M_0,\ x(T) \in M_1 \qquad\qquad (\mathbf{OCP})_\mathbf{T} \\ &\min \frac{1}{T}\int_0^T f^0(x(t), u(t))\, dt \end{aligned}$$

avec $x(t) \in X$ et $u(t) \in U$ (notons que le terme $\frac{1}{T}$ dans le minimum ne sert à rien : il n'est écrit que pour faciliter le changement de variable qui suit).
Pour simplifier, on suppose que $(\mathbf{OCP})_\mathbf{T}$ a une unique solution optimale, notée $(x_T(\cdot), u_T(\cdot))$.

On suppose que T est grand : $T \gg 1$. On pose $\varepsilon = \frac{1}{T}$ qui est alors un petit paramètre : $0 < \varepsilon \ll 1$. En posant $s = \varepsilon t = \frac{t}{T}$, $y(s) = x(t) = x(Ts)$, $v(s) = u(t) = u(Ts)$, on se ramène au problème de contrôle optimal en temps final fixé égal à 1 :

$$\begin{aligned} &\varepsilon y'(s) = f(y(s), v(s))) \\ &y(0) \in M_0,\ y(1) \in M_1 \\ &\min \int_0^1 f^0(y(s), v(s))\, ds \end{aligned}$$

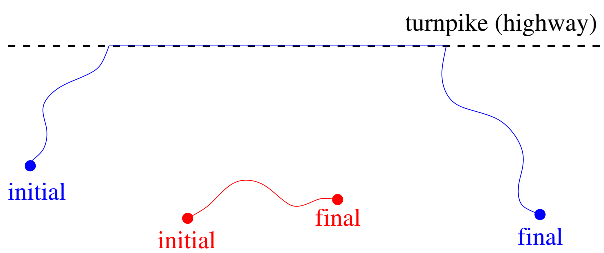
Comme $\varepsilon \ll 1$, on a, de manière formelle, $f(y(s), v(s))) \simeq 0$.

On s'attend donc à ce que la solution optimale $(x_T(\cdot), u_T(\cdot))$ du problème de contrôle optimal dynamique $(\mathbf{OCP})_\mathbf{T}$ soit "proche" (dans un sens à préciser) de la solution optimale du problème de minimisation

$$\min\{f^0(x,u) \ \mid\ (x,u) \in X \times U,\ f(x,u) = 0\} \qquad\qquad (\mathbf{SOCP})$$

appelé problème de contrôle optimal statique. Supposons pour simplifier que $(\mathbf{SOCP})$ a une unique solution optimale, notée $(\bar{x}, \bar{u})$.

C'est le "phénomène de turnpike" : lorsqu'on se rend, en voiture, d'un point initial à un point final, si l'origine et la destination sont suffisamment proches, alors on va prendre une certaine route, mais certainement pas une autoroute car cela ne vaut pas le coup. Alors que, si l'origine et la destination sont loin l'une de l'autre (autrement dit, le temps de transfert est grand), alors cela vaudra toujours le coup de prendre l'autoroute ("turnpike" = autoroute en anglais). La trajectoire optimale consiste alors à rejoindre dès que possible l'autoroute (par une première trajectoire transitoire), puis à rester (longtemps) sur l'autoroute, puis à quitter l'autoroute et rejoindre (par une dernière trajectoire transitoire) la destination.



Le phénomène de turnpike stipule que, si $T \gg 1$, à part au début et à la fin de l'intervalle de temps $[0, T]$, i.e., à part au voisinage de $t = 0$ et de $t = T$, on a $x(t) \simeq \bar{x}$ et $u(t) \simeq \bar{u}$.

De plus, on peut appliquer le principe du maximum de Pontryagin à $(\mathbf{OCP})_\mathbf{T}$, obtenant un vecteur adjoint $p_T(\cdot)$ (supposé unique, et normal, pour simplifier), et la règle des multiplicateurs de Lagrange à $(\mathbf{SOCP})$, obtenant un multiplicateur $\bar{p}$ (supposé unique, et normal, pour simplifier). On peut alors ajouter au postulat de turnpike l'approximation $p_T(t) \simeq \bar{p}$.

<u>*Turnpike dans le cas linéaire quadratique :*</u> On se propose de démontrer le phénomène de turnpike exponentiel dans le cas linéaire-quadratique. On considère le problème de contrôle optimal dynamique en temps final fixé $T > 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ &x(0) = x_0,\ x(T) = x_1 \qquad\qquad\qquad (\mathbf{OCP})_\mathbf{T} \\ &\min \int_0^T \left(x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top U u(t) \rangle \right) dt \end{aligned}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et où Q et U sont des matrices symétriques définies positives.

Soit $(x_T(\cdot), u_T(\cdot))$ l'unique solution optimale de $(\mathbf{OCP})_\mathbf{T}$ (elle est unique par stricte convexité). On suppose que (A, B) vérifie la condition de Kalman.

1. Application du principe du maximum de Pontryagin à $(\mathbf{OCP})_\mathbf{T}$.
   (a) Montrer qu'il n'y a pas d'extrémale anormale. On posera $p^0 = -1/2$.
   (b) Ecrire le système extrémal. On note $p_T(\cdot)$ l'adjoint et on pose
   $$M = \begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^\top \\ Q & -A^\top \end{pmatrix}$$
2. Etude spectrale.
   (a) Montrer, en utilisant la condition de Kalman sur (A, B), que
   $$\ker(A^\top - \lambda I_n) \cap \ker(B^\top) = \{0\} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$
   (b) Montrer que la matrice M n'a aucune valeur propre imaginaire pure.
   On dit que la matrice M est hyperbolique, i.e., elle n'a que des valeurs propres à partie réelle non nulle. Il existe alors une matrice réelle P, carrée, de taille $2n$, telle que
   $$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$
   où la matrice M_1 n'a que des valeurs propres à partie réelle < 0, et M_2 n'a que des valeurs propres à partie réelle > 0.
3. Démontrer la propriété de turnpike exponentiel : il existe des constantes $C > 0$ et $\nu > 0$, indépendantes de T, telles que
   $$\|x_T(t) - \bar{x}\| + \|u_T(t) - \bar{u}\| + \|p_T(t) - \bar{p}\| \leqslant C(e^{-\nu t} + e^{-\nu(T-t)}) \qquad \forall t \in [0, T].$$

Corrigé:

1. Le Hamiltonien du système est $H(x, p, p^0, u) = \langle p, Ax \rangle + \langle p, Bu \rangle + p^0(x^\top Qx + u^\top Uu)$.
   (a) Si $p^0 = 0$ alors la condition $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ donne $\langle p(t), B \rangle = 0$, et en dérivant successivement et en utilisant le fait que $\dot{p}(t) = -A^\top p(t)$, on obtient $\langle p(t), A^k B \rangle = 0$, ce qui donne une contradiction avec la condition de Kalman car $p(t) \neq 0$.
   (b) En posant $p^0 = -1/2$, la condition $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ conduit à $u_T(t) = U^{-1}B^\top p_T(t)$, et le système extrémal est
   $$\begin{aligned} \dot{x}_T(t) &= Ax_T(t) + BU^{-1}B^\top p_T(t) \\ \dot{p}_T(t) &= Qx_T(t) - A^\top p_T(t) \end{aligned}$$
   i.e.,
   $$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_T(t) \\ p_T(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^\top \\ Q & -A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_T(t) \\ p_T(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_T(t) \\ p_T(t) \end{pmatrix}$$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $A^\top z = \lambda z$ et $B^\top z = 0$. Alors $B^\top A^\top z = \lambda B^\top z = 0$ et par récurrence, $B^\top (A^\top)^k z = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La condition de Kalman implique que $z = 0$.

   (b) Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $(M - i\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} (A - i\mu)x + BU^{-1}B^\top y = 0 \\ Qx - (A^\top + i\mu)y = 0 \end{aligned}$$

   donc $x = Q^{-1}(A^\top + i\mu)y$ et donc $(A - i\mu)Q^{-1}(A^\top + i\mu)y + BU^{-1}B^\top y = 0$. En multipliant à gauche par $y^\top$, on obtient $\|Q^{-1/2}(A^\top + i\mu)y\|^2 + \|U^{-1/2}B^\top y\|^2 = 0$ et donc $(A^\top + i\mu)y = 0$ et $B^\top y = 0$. D'où $y = 0$ par la question 2(a). Donc M n'a aucune valeur propre imaginaire pure.

3. En posant $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, le système extrémal donne

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1}MP \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

   donc $\dot{z}_1(t) = M_1 z_1(t)$ et $z_2(t) = M_2 z_2(t)$. La matrice M_1 n'a que des valeurs propres à partie réelle < 0, donc il existe des constantes $C_1 > 0$ et $\nu_1 > 0$, ne dépendant pas de T, telles que $\|z_1(t)\| \leqslant C_1 e^{-\nu_1 t}$. Pour $z_2(t)$, on inverse le temps et on applique le même argument, d'où $\|z_2(t)\| \leqslant C_2 e^{-\nu_2(T-t)}$. On conclut en remarquant que $x_T(t)$ et $p_T(t)$ sont des combinaisons linéaires de $z_1(t)$ et $z_2(t)$.